Tarea n°3

1. Sea $A = ab^T$ tal que a, b son vectores n-dimensionales.
   (a) Dar una descomposición SVD de esa matriz en la forma $A = UDV^T$ y en la forma $A = \sum \lambda_i u_i v_i^T$. Se expresara los λ_i en función de a y b.
   (b) En estas dos mismas formas dar la descomposición de la matriz $A^2 - A$.
   (c) Mostrar que cuando $\langle a, b \rangle = 1$, A es una matriz de proyección sobre un espacio que se describirá.
2. Sea A una matriz $n \times m$ de rango r. Consideramos su descomposición SVD, $A = UDV^T$ con

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   y Λ una matriz diagonal de valores propios positivos. Definamos $A^- = VD^-U^T$ donde

$$D^- = \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Mostrar que A^- es tal que $AA^-A = A$ y $A^-AA^- = A^-$ y que las matrices AA^- y A^-A son simétricas.
   (b) Para un $b \in \mathbb{R}^m$, consideramos el problema de regresión lineal siguiente

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|Ax - b\|^2$$

   donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana. Supongamos que no existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$. Mostrar que el problema se resuelve con la solución $x^* = A^-b$. (Pista : Usar la descomposición $x = x^* + h$ y descomponer $\|Ax - b\|^2$.)