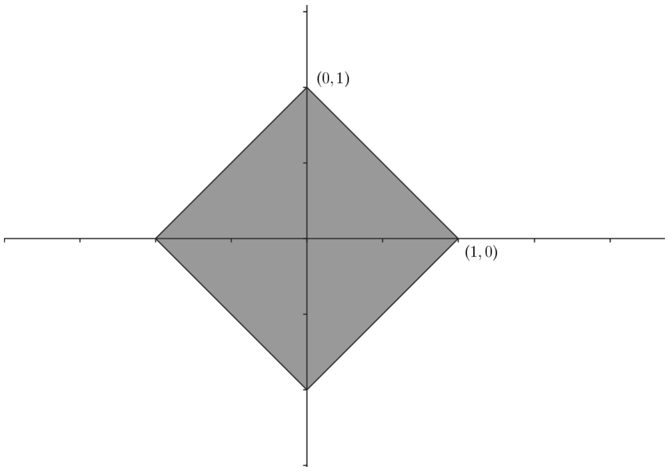
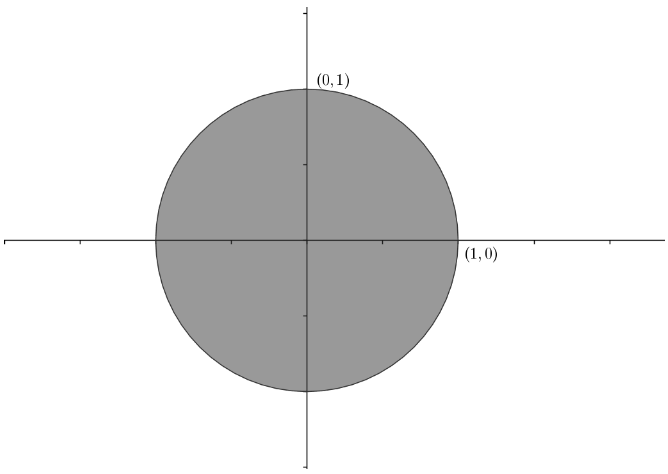
Tarea n°2

Denotamos por $\mathcal{C}_1$ el conjunto definido en gris en la imagen siguiente.



1. Encontrar una función h y una constante c tal que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow h(x,y) \leq c$.
2. Sea U el vector aleatorio de distribución uniforme sobre $\mathcal{C}_1$. Mostrar que U tiene una función de densidad f_U y dala explícitamente.
3. Calcular las densidades de las marginales U_1 y U_2 de U.
4. Sea r la rotación de angulo $\frac{\pi}{4}$. Dar la expresión de $r(x,y)$ para cualquier elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
5. Denotamos $V = r(U)$ la transformación de U bajo r. Calcular las densidades de las marginales V_1, V_2 de V.
6. Mostrar que la ley de V es una medida producto.

Ahora se considera el conjunto $\mathcal{C}_2$ siguiente y sea W el vector aleatorio de distribución uniforme sobre $\mathcal{C}_2$.



7. Dar, sin justificación, la densidad de W.
8. Calcular la densidad de la marginal W_1.
9. Se considera la función $\phi : (x,y) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2}, \theta(x,y))$ donde $\theta(x,y)$ es el angulo en $(-\pi, \pi]$ que el vector (x,y) hace con el eje Ox. Se considera el nuevo vector $Z = \phi(W)$. Calcular la densidad de las marginales Z_1 y Z_2. (Ayuda : Usar la formula de cambio de variables en dimensión 2)
10. Mostrar que las variables Z_1 y Z_2 son independientes.