

Tarea n°3

Un ingeniero industrial (que llamaremos Diego) construye componentes electrónicos para computadoras. Él se quiere comparar con un ingeniero de otro país que produce condensadores de $10\mu F$ muy similares a sus condensadores de $8\mu F$. Diego sabe que lo importante para la industria de computadoras es la longevidad de los componentes electrónicos. Para hacer su estudio estadístico, Diego compró 500 condensadores de la marca extranjera y los hace funcionar hasta que se averían y mide el tiempo de fin de vida de cada uno. Diego decide modelar el tiempo de vida de un condensador con una variable aleatoria de distribución exponencial. El resultado de su estudio esta contenido en el archivo DATOS.TXT.

1. Justificar que la idea de Diego de modelar el tiempo de vida de los condensadores con variables exponenciales (de densidad dada por $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$) es relevante. ¿Podrías hacer alguna crítica a su idea?
2. Introducir un modelo estadístico completo para modelar el problema.
3. ¿Es identificable el modelo introducido?
4. El estimador del método de momentos de λ está dado por $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n}$ donde $\bar{X}_n$ es la media empírica. Utiliza los datos del archivo DATOS.TXT para calcular $\hat{\lambda}$, y para dibujar en el mismo gráfico la densidad exponencial de parámetro $\hat{\lambda}$ y el histograma de los datos. Comenta sobre lo que se observa en la figura.

Diego se da cuenta que su modelación no es perfecta. De hecho la distribución de las X_i es una $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ (de densidad $x \mapsto x^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)^{-1}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}$ con $\alpha \geq 1$). Uno da la función de perdida siguiente.

$$\ell(\theta, \theta') = (\mathbb{E}_{P_\theta} [X] - \mathbb{E}_{P_{\theta'}} [X])^2 + |\text{Var}_{P_\theta} (X) - \text{Var}_{P_{\theta'}} (X)|$$

5. Calcular el valor teórico del error de especificación que introdució Diego al reducirse al caso puro exponencial. Mostrar que vale 0 si $\alpha = 1$.
6. ¿Cuál sería el modelo corregido que tomaría la observación de Diego en cuenta? ¿Sigue siendo identificable?
7. Dado que la esperanza y la varianza de una $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ son respectivamente $\alpha\lambda^{-1}$ y $\alpha\lambda^{-2}$, crear un estimador de (α, λ) .
8. Dibujar la densidad obtenida sobre el mismo dibujo que a la pregunta 4. Comenta sobre lo que se observa en la figura.