Tarea n°1

Sea $([0,1],\mathcal{B},\mathrm{Leb})$ el espacio de probabilidad sobre el intervalo $[0,1]$. La notación $\mathcal{B}$ designa el conjunto de los borelianos de $[0,1]$ y Leb denota la medida de Lebesgue. Sea X la función entre los espacios $([0,1],\mathcal{B},\mathrm{Leb})$ y $(\mathbb{R},\mathcal{B},P_X)$ definida por

$$u \mapsto X(u) = -\theta \log(1-u) \tag{1}$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro.

1. (a) ¿Cuál es el soporte de la variable aleatoria X ?
   (b) Mostrar que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$ tal que $a < b$, se tiene que $P_X([a,b]) = e^{-\frac{a}{\theta}} - e^{-\frac{b}{\theta}}$.
   (c) Mostrar que X tiene una densidad f_X que se calculara.
   (d) Calcular $\mathbb{E}[X]$ y $\mathrm{Var}(X)$.
2. Sea $Y = \lceil X \rceil$ donde el valor entero superior $\lceil x \rceil$ de x se define como $\lceil x \rceil = \min\{t \in \mathbb{N} : x \leq t\}$.
   (a) Mostrar que el soporte de Y es $\mathbb{N}$ y dar P_Y.
   (b) Reconocer la distribución de Y y explicitar su parámetro.
   (c) Calcular su función de distribución, F_Y.
   (d) ¿Cuál es la mediana de Y ? Discutir de su unicidad.
   (e) Calcular la función cuantiles de Y y comparar con la definición (1).
3. Sea $\lambda > 0$, $p = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}}$ y sea $Z_p = \frac{p}{\lambda} Y$. Mostrar que $\mathbb{P}(Z_p \leq t)$ tiene un limite cuando $p \to 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Esta función de distribución es conocida. Indica su nombre.
4. La distrbución geometrica truncada de parámetros p, n esta dada por

$$\mathbb{P}(W = k) = q^{k-1}p \quad \forall k = 1, \ldots, n$$
$$\mathbb{P}(W = 0) = q^n$$

   donde $q = 1 - p$. Mostrar que eso define bien una distribución de probabilidad y calcular $\mathbb{E}[W]$.