Tarea n°1

El objectivo de esta tarea es investigar condiciones sobre distribuciones para que éstas sean definidas en forma única por sus momentos. Dada una medida μ, definimos para cada $p \in \mathbb{N}^*$, el momento de orden p como

$$\mu_p = \int x^p d\mu.$$

Denotamos como $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ al conjunto de medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}$ que tienen momentos finitos de cualquier orden y $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ las medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}_+$ que tienen momentos finitos de cualquier orden. Dada una sucesión real $\mathbf{m} = (m_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, sean

$$K(\mathbf{m}) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \forall p \in \mathbb{N}^*, \mu_p = m_p\} \qquad \text{(Problema de Hamburger)}$$

y

$$K^+(\mathbf{m}) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+) : \forall p \in \mathbb{N}^*, \mu_p = m_p\} \qquad \text{(Problema de Stieljes)}$$

las soluciones de los problemas de momentos de Hamburger y de Stieljes. Decimos que una variable aleatoria X con sucesión de momentos $\mathbf{m}$ es *únicamente definida por sus momentos (UDM)* si $K(\mathbf{m})$ tiene un único elemento.

P.1 Mostrar que una variable aleatoria X tal que $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{E}[X^2] = 1$ y $\mathbb{E}[X^4] = 1$ es igual (en distribución) a una variable de Rademacher (que vale 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$ y -1 con probabilidad $\frac{1}{2}$). Dar un ejemplo de secuencia $\mathbf{m}$ tal que $K(\mathbf{m}) = \emptyset$.

En el siguiente, suponemos que $\mathbf{m}$ es tal que $K(\mathbf{m}) \neq \emptyset$.

P.2 Sea X una variable aleatoria de medida $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ de soporte finito y sea $\mathbf{m}$ la sucesión de los momentos μ_p de μ. Mostrar que X es UDM. *Pista : Para mostrar que* $\sum z_i x_i^p = 0$ *implica* $\forall i, z_i = 0$ *considere una formulación matricial y use el determinante de Vandermonde.*
Mostrar que, efectivamente, X es UDM $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n}$ donde n es el numero de átomos de μ.

P.3 Suponemos que μ es de soporte compacto. Usar el teorema de Portmanteau para probar que X es UDM.

P.4 Una variable beta (α, β) es una variable aleatoria de densidad sobre $[0, 1]$ igual a

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.$$

Calcular los momentos de una variable beta (α, β). ¿Qué podemos decir de una sucesión $(X_n)_n$ de variables aleatorias tal que para cada $p \in \mathbb{N}^*$ tenemos

$$\mathbb{E}[X_n^p] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{\alpha+i}{\alpha+\beta+i}?$$

Recordamos el siguiente teorema :

Teorema Una función holomorfa en un abierto U que vale 0 sobre un conjunto que tiene un punto de acumulación de U es nula sobre todo U. *Los interesados pueden encontrar el teorema y su prueba en el libro : Real and Complex analysis, 1987, W. Rudin*

P.5.a Mostrar que para cada $w > 0$ y cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) > 0$ (parte real es positiva),

$$\int_0^{+\infty} t^{w-1} e^{-zt} dt = \frac{1}{z^w}\Gamma(w).$$

P.5.b Sea $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}|x|^{-2/3}\exp(-|x|^{2/3})\cos\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}|x|^{2/3}\right).$$

Mostrar que para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^p g(x)dx = 0.$$

P.5.c Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}|x|^{-2/3}\exp(-|x|^{2/3}).$$

Mostrar que para $\rho \in [0, 1/2]$, $f + \rho g$ es una función de densidad y que para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p (f + \rho g)(x)dx$$

Deducir que X, cuya densidad es f, no es UDM.

P.5.d Sea $\mathbf{m}$ tal que si p es par $m_p = 0$ y si p es impar $m_p = (3p-1)(3p-3)\dots 1$. ¿Qué podemos decir de $K(\mathbf{m})$?

P.6.a Mostrar que $K(\mathbf{m})$ es un conjunto convexo.

P.6.b Mostrar que $K(\mathbf{m})$ es un conjunto compacto.

P.7 Mostrar lo siguiente :

Proposición Sea X una variable aleatoria sobre $\mathbb{R}$ de medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Supo-nemos que la serie de Laplace

$$\sum_{p \geq 1} \frac{\mu_p}{p!} z^p$$

es de radio de convergencia no nulo, entonces X es UDM.

P.8.a Calcular el radio de convergencia de la serie de Laplace para X una variable $\mathcal{N}(0, 1)$. Deducir que X es UDM.

P.8.b Calcular los momentos de $Y = \exp(N)$, donde $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$. ¿Qué el radio de convergencia de la serie de Laplace ?

Admitimos el teorema siguiente :

Teorema Sea X una variable de densidad f positiva sobre $\mathbb{R}_+$. Si

$$\int_0^{+\infty} \frac{-\log f(t)}{1 + t^2} dt < +\infty,$$

entonces X no es UDM.

P.9.a Mostrar que la variable aleatoria Y definida en **P.8.b** no es UDM.

P.9.b Sea $Z = W^3$ donde W es una variable aleatoria exponencial de parametro 1. Mostrar que Z no es UDM.