Tarea n°2

In this tarea se busca comparar la técnica de 'regular chaining' con la de 'generic chaining'. La fecha de entrega de la tarea es el **06/04/2020**.

En lo que sigue, T es un espacio métrico y llamamos d la distancia asociada. Digamos que una sucesión $(\mathcal{A}_n)_n$ de particiones crecientes (i.e. $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$) de T es **admisible** si $|\mathcal{A}_n| \leq 2^{2^n} =: N_n$ para cada $n \geq 1$ y $|\mathcal{A}_0| = 1$. Por un elemento $t \in T$, se denota $A(t)$ el único elemento de $\mathcal{A}_n$ que contiene t. Usaremos la notación $\Delta(A)$ para designar el diámetro de $A \in \mathcal{A}_n$.

1. Sea $(\mathcal{A}_n)$ una sucesión admisible y $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_{n-1} \times \mathcal{A}_n$ si $n \geq 1$ y $\mathcal{B}_{-1} = \mathcal{B}_0 = \{T\} \times \{T\}$. Mostrar que $(\mathcal{B}_{n-1})_{n\geq 0}$ es admisible por el espacio $T \times T$.
2. Mostrar que si dos sucesiones $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{C}_n$ son admisibles entonces la sucesión $\mathcal{A}_n$ de las particiones dondes los elementos son de la forma $B \cap C$ con $B \in \mathcal{B}_{n-1}$ y $C \in \mathcal{C}_{n-1}$ y tal que $\mathcal{A}_0 = \{T\}$ es admisible.
3. Dado una sucesión admisible $(\mathcal{A}_n)_n$, decir como construir mapeos $\Pi_n : T \to A_n$ tal que $\forall t \in T$
$$d(\Pi_n(t), \Pi_{n+1}(t)) \leq \Delta(A_n(t)).$$
4. Sea $(X_t)_{t\in T}$ un proceso de incrementos sub-Gaussianos y tal que $\forall t \in T,\ \mathbb{E}[X_t] = 0$. Mostrar que $\forall n \geq 0$ y $\forall u > \sqrt{16 \log 2}$,
$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} \frac{X_{\Pi_{n+1}(t)} - X_{\Pi_n(t)}}{\Delta(A_n(t))} \geq u2^{n/2}\right) \leq N_{n+2} \exp(-u^2 2^{n-1}) \leq \exp(-u^2 2^{n-2}).$$
Mostrar que $\sum_{n\geq 0} \exp(-u^2 2^{n-2}) \leq \sum_{n\geq 1} \exp(-\frac{u^2}{4} n) \leq 2\exp(-\frac{u^2}{4})$.
5. Usando 4., mostrar que
$$\mathbb{P}\left(\forall t \in T,\ X_t < u \sum_{n\geq 0} 2^{n/2} \Delta(A_n(t))\right) \geq 1 - 2\exp(-u^2/4)$$
y deducir que existe una constante $L > 0$ universal tal que
$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in T} X_t\right] \leq L \inf_{(\mathcal{A}_p)_p \text{ admisible}} \sup_{t\in T} \sum_{n\geq 0} 2^{n/2} \Delta(A_n(t)).$$
Esa cota se llama cota de **generic chaining**.
6. Para cada n, definimos $e_n = \inf_{(\mathcal{A}_p)_p} \sup_t \Delta(A_n(t))$. Mostrar que $e_n = 2\inf\{\varepsilon : \mathcal{N}(\varepsilon, T, d) \leq N_n\}$. Deducir que existe una constante universal C tal que
$$\inf_{(\mathcal{A}_p)_p \text{ admisible}} \sup_{t\in T} \sum_{n\geq 0} 2^{n/2} \Delta(A_n(t)) \leq \sum_{n\geq 0} 2^{n/2} e_n \leq C \int_0^\infty \sqrt{\log \mathcal{N}(\varepsilon, T, d)} d\varepsilon.$$
La cota de **generic chaining** es mejor que la cota de **Dudley**.
7. Sea $(a_i)_{i\geq 1}$ una sucesión decreciente t.q. $a_i > 0$, definimos el elipsoide
$$\mathcal{E} = \left\{ t \in \ell^2 : t_i > 0 \text{ y } \sum_i \frac{t_i^2}{a_i^2} \leq 1 \right\}.$$
Sea $(g_i)_{i\geq 1}$ una sucesión i.i.d. de variables Gaussianas estandares. Consideramos el proceso $X_t = \sum_{t\in\mathcal{E}} t_i g_i$. Mostrar que
$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in T} X_t\right] \leq \left(\sum_{i\geq 1} a_i^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n\geq 0} 2^n a_{2^n}^2\right)^{1/2}.$$

8. En esa pregunta queremos probar que el orden de $\sum_{n\geq 0} 2^{n/2} e_n$ is of order larger than $(\sum_{n\geq 0} 2^n a_{2^n}^2)^{1/2}$. Sea
$$\mathcal{E}_n = \left\{ t \in \mathbb{R}^{2^n} : t_i > 0 \text{ y } \sum_i \frac{t_i^2}{a_i^2} \leq 1 \right\}.$$
   (a) Mostrar que $e_n(\mathcal{E}_n) \leq e_n(\mathcal{E})$.
   (b) Sea B la bola unitaria Euclidiana de $\mathbb{R}^{2^n}$, sea $T \subset \mathcal{E}_n$ un conjunto finito t.q $|T| \leq N_n$ y sea $\varepsilon > 0$. Mostrar que
   $$\mathrm{Vol}\left(\cup_{t\in T}(\varepsilon B + t)\right) \leq (2\varepsilon)^{2^n} \mathrm{Vol}(B).$$
   (c) Mostrar que $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_n) \geq a_{2^n}^{2^n} \mathrm{Vol}(B)$. Deducir que $\mathcal{E}_n \subset \cup_{t\in T}(\varepsilon B + t) \implies 2\varepsilon \geq a_{2^n}$.
   (d) Finalmente, probar que $e_n(\mathcal{E}) \geq a_{2^n}/2$ y concluir.

En generalidad completa, la cantidad $\inf_{\mathcal{A}_n \text{ admisible}} \sup_{t\in T} \sum_{n\geq 0} 2^{n/2} \Delta(A_n(t))$ siempre tiene el orden de magnitud correcto aun que la cota de Dudley es demasiado conservativa.