Tarea n°3

Digamos que una función $f : \mathcal{X}^n \to [0, \infty)$ tiene la propiedad de ser *acotada por si misma* si para cada i existe una función $f_i : \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$0 \leq f(x_1, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq 1$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_1, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq f(x_1, \ldots, x_n).$$

Notaciones :

1. $\mathrm{Ent}(X) = \mathbb{E}\left[X \log X\right] - \mathbb{E}X \log(\mathbb{E}X)$
2. $X^{(i)} = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ y $\mathbb{E}^{(i)}[.] = \mathbb{E}[.|X^{(i)}]$.
3. $\mathrm{Ent}^{(i)}(X) = \mathbb{E}^{(i)}[X \log X] - \mathbb{E}^{(i)} X \log(\mathbb{E}^{(i)} X)$.
4. $\phi(u) = e^u - 1 - u$.
5. $\psi_{Z-\mathbb{E}Z}(\lambda) = \log \mathbb{E}\left[e^{\lambda(Z-\mathbb{E}Z)}\right]$

Se **admite** la desigualdad de sub-aditividad de entropías : $\mathrm{Ent}(Z) \leq \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ent}^{(i)}(Z)$.

P.1 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa y derivable. Sea X una variable tal que $X \in I$. Mostrar que

$$\mathbb{E}\left[f(X) - f(\mathbb{E}X)\right] = \inf_{a \in I} \mathbb{E}\left[f(X) - f(a) - f'(a)(X - a)\right]$$

P.2 Sea Y una variable no negativa tal que $\mathbb{E}\left[Y \log Y\right] < \infty$. Mostrar que

$$\mathrm{Ent}(Y) = \inf_{u>0} \mathbb{E}\left[Y(\log Y - \log u) - (Y - u)\right].$$

P.3 Sea Z_i una función de las variables en $X^{(i)}$. Mostrar que

$$\mathrm{Ent}^{(i)}\left(e^{\lambda Z}\right) \leq \mathbb{E}^{(i)}\left[e^{\lambda Z} \phi(-\lambda(Z - Z_i))\right].$$

P.4 Mostrar que

$$\mathrm{Ent}\left(e^{\lambda Z}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\lambda Z} \phi(-\lambda(Z - Z_i))\right].$$

P.5 Justificar que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall u \in [0, 1]$, $\phi(-\lambda u) \leq u\phi(-\lambda)$. Sea $Z = f(X_1, \ldots, X_n)$ donde f es acotada por si misma. Deducir la desigualdad diferencial

$$\left(\frac{\psi_{Z-\mathbb{E}Z}(\lambda)}{e^{\lambda} - 1}\right)' \leq \mathbb{E}Z \cdot \left(\frac{-\lambda}{e^{\lambda} - 1}\right)'$$

P.6 Mostrar que $\log \mathbb{E}\left[e^{\lambda(Z-\mathbb{E}Z)}\right] \leq \phi(\lambda)\mathbb{E}Z$ y que $\mathbb{P}\left(Z \geq \mathbb{E}Z + t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\mathbb{E}Z + 2t/3}\right)$

Una variable definida por una función acotada por si misma se **concentra**.

Preguntas opcionales :

Una propiedad Π *definida sobre una union finita de productos* de un conjunto $\mathcal{X}$ es una secuencia $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ tal que $\Pi_1 \subset \mathcal{X}, \ldots, \Pi_n \subset \mathcal{X}^n$. Digamos que la $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{X}^m$ satisface la propiedad Π si $(x_1, \ldots, x_m) \in \Pi_m$. Una propiedad es *hereditaria* si por cada secuencia $(x_1, \ldots, x_m)$ que satisfaga la propiedad Π cada sub-secuencia $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ satisface Π.

P'.1 (Ejercicios Hora 3) Sea f acotada por si misma y $Z = f(X_1, \ldots, X_n)$ donde los X_i son variables aleatorias independientes. Mostrar que $\mathrm{Var}(Z) \leq \mathbb{E}Z$.

P'.2 Sea Π una propiedad hereditaria. Para cada $(x_1, \ldots, x_m)$, se asocia el tamaño máximo de una sub-secuencia de $(x_1, \ldots, x_m)$ que satisfaga Π. Denotamos $f_\Pi(x_1, \ldots, x_m)$ este valor. Mostrar que f_Π es acotada por si misma.

Una función f tal que existe una propiedad Π tal que $f = f_\Pi$ se llama *función de configuración.*

P'.3 Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. discretas. Sea Z el numero de valores distintos que tomen las variables $X_1, \ldots, X_n$. Mostrar que Z es una función de configuración de las $X_1, \ldots, X_n$.

P'.4 (Utilizamos las notaciones de la tarea 2) Para una clase $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ y elementos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$, digamos que $\mathcal{A}$ rompe $(x_1, \ldots, x_n)$ si $|\mathcal{A}(x_1^n)| = 2^n$. Denotamos $VC(\mathcal{A}, x_1^n)$ el tamaño máximo de una sub-secuencia de $(x_1, \ldots, x_n)$ que está rota por $\mathcal{A}$. Mostrar que este noción de dimensión VC es una función de configuración.