Théorème de Cochran

Un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit *gaussien* si toute combinaison linéaire de ses composantes suit une loi gaussienne. On note ^{T} la transposée de matrices. Si $X = (X_1, \dots, X_d)^T$ est un vecteur gaussien, on définit son *vecteur moyenne* et sa matrice de *variance-covariance* par :

$$\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])^T$$

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T\right]$$

1. Quelle est la loi d'une composante d'un vecteur gaussien ?
2. Soit $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$, montrer que $(\operatorname{Var}(X))_{i,j} = \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$.
3. Rappeler la fonction caractéristique ϕ_{μ,σ^2} de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

On définit la fonction caractéristique ϕ_X pour un vecteur par $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{it^T X}\right]$

4. Soit X un vecteur gaussien de vecteur moyenne m et de matrice de variance-covariance Σ. Montrer que $\phi_X(t) = \exp(it^T m - \frac{t^T \Sigma t}{2})$.

La loi d'un vecteur gaussien X est donc entièrement déterminée par la donnée de m et de Σ. On note $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ cette loi.

5. Expliquer cette affirmation.
6. Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$, A une matrice de taille $d' \times d$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^{d'}$. Montrer que $AX + b \sim \mathcal{N}(Am + b, A\Sigma A^T)$
7. Soit X un vecteur gaussien. Soit $i, j \in \{1, \dots, d\}$ avec $i \neq j$, montrer l'équivalence :

$$X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes } \iff \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = 0$$

   Comment reconnait-on que toutes les composantes d'un vecteur gaussien sont indépendantes ?

(On pourra utiliser la question 4 pour résoudre 6 et 7)
Pour E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ on notera Π_E la projection orthogonale sur E.

8. Soit $X \sim \mathcal{N}(m, I_d)$ et une décomposition $\mathbb{R}^d = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ en sous-espaces orthogonaux. Montrer que les vecteurs gaussiens $\Pi_{E_1} X, \dots, \Pi_{E_r} X$ sont indépendants. (C'est le **Théoreme de Cochran**)