

Mémoire M2 : unicité de la composante
connexe infinie en percolation orientée de
dimension 2

Emilien Joly

été 2010

Plan

1	Introduction	4
2	Définitions et énoncé du théorème	5
2.1	Définitions	5
2.2	Enoncé	6
2.3	Deux Lemmes	6
3	Etude du chemin γ	7
3.1	Poser les notations	7
3.2	Construction de la suite $(v_k(\Gamma))_k$	8
3.3	Minoration de $\mathbb{P}_p(E(k, \Gamma) \gamma_{(0,0)} = \Gamma)$	9
4	Application pour $C_{(x_1, n_1)} \asymp C_{(x_2, n_2)}$	12
5	Démonstration des lemmes	13
5.1	Définition des temps de mort	13
5.2	Décroissance exponentielle	14
5.3	Expression de τ_i avec les temps de mort	15
5.4	Autour des lois des Y_i	17
5.5	Interprétation de $\{(X_1, \tau_1) = (x, t)\} \cap \{ C_{(0,0)} = \infty\}$	19
5.6	Fin de la preuve du lemme 3	19
6	Conclusion	22

Table des figures

1	Points de croisement	8
2	Les zones $Area(k, \Gamma)$	9
3	Invariance par demi-tour	10
4	Réalisation de $E(k, \Gamma)$	11
5	Deux cas pour $\Delta(u_1, u_2)$	12
6	Position des break points	14
7	Chemin bloquant	15
8	Exemple de construction des Y_i	16
9	Chemins $(y, n) \rightarrow (r_{n+m}, n+m)$ et $(r_n, n) \rightarrow (x, n+m)$	17
10	Exemple de $(X_1, \tau_1) = (r_t, t)$	20

1 Introduction

Le but de ce mémoire sera de faire la preuve intelligible pour un étudiant de M2 en probabilités de l'unicité de la composante connexe infinie pour la percolation orientée surcritique en dimension 2. Durrett [1] définit la percolation orientée et en donne quelques propriétés simples sur lesquelles nous nous appuyerons majoritairement pour détailler la démonstration. L'article [2] de Wu et Zhang développe toutes les idées avec lesquelles nous montrerons entre autres que pour $p > p_c$, pour toute paire de chemins ouvert infinis, il existe p.s. un point de concours de ces chemins. Ce résultat tout comme l'unicité de la composante connexe infinie en percolation classique n'est pas immédiat et demande la définition de plusieurs outils annexes que nous exposerons en premier lieu.

2 Définitions et énoncé du théorème

2.1 Définitions

La percolation orientée se définit grâce à l'ensemble L défini comme suit :

$$L = \{(x, n) \in \mathbb{Z}^2 : x + n \text{ est pair, } n \geq 0\}$$

pour chaque $(x, n) \in L$ il y a un arc orienté vers $(x, n) + (1, 1)$ et vers $(x, n) + (-1, 1)$. L'ensemble A ainsi défini est l'ensemble des arêtes orientées de la percolation orientée. Chaque arête de A est ouverte avec probabilité p et fermée avec probabilité $1 - p$.

Définition 1. On dit que (y, m) est accessible depuis (x, n) noté $(x, n) \rightarrow (y, m)$ si il y a un chemin orienté ouvert de x à y qui est une suite $(x, n) = (x_0, n); (x_1, n+1); (x_2, n+2); \dots; (x_{m-1-n}, m-1); (x_{m-n}, m) = (y, m)$ et telle que chaque arête $(x_i, n+i); (x_{i+1}, n+i+1)$ est ouverte

Définition 2. On note $C_{(x,n)} = \{(y, m) : (x, n) \rightarrow (y, m)\}$ l'ensemble des points accessibles depuis (x, n) . On dit que (x, n) est un point de percolation si $|C_{(x,n)}| = \infty$
Et soit $\theta(p) = \mathbb{P}(|C_{(x,n)}| = \infty) = \mathbb{P}(|C_{(0,0)}| = \infty)$

On montre comme en percolation classique qu'il existe une valeur $p_c \in]0, 1[$ telle que $\forall p > p_c, \theta(p) > 0$. On se place désormais dans ce cas de figure.

Définition 3 (Chemin infini le plus à droite).

Soit

$$\xi_n^{(y,m)} = \{x : (x, n+m) \in L \text{ tq } (y, m) \rightarrow (x, n+m)\}$$

et

$$r_n^{(y,m)} = \sup \xi_n^{(y,m)}$$

$r_n^{(y,m)}$ ainsi défini est appelé le point le plus à droite relié à (y, m) à l'étage n .
Et enfin, on désignera par $\gamma_{(y,m)}$ le chemin infini situé le plus à droite et relié à (y, m)

Cette définition contient un petit problème dans le cas où $\xi_n^{(y,m)} = \emptyset$ et par conséquent $r_n^{(y,m)}$ n'est pas défini!! Dans le cas qui nous intéresse ce petit souci peut être réglé en étendant la définition dans ce cas par ce que l'on veut puisque ce cas ne se présentera pas sous $|C_{(0,0)}| = \infty$! Dans [3], l'extension agréable proposée est par récurrence :

$$\begin{aligned} \xi_0^{(y,m)} &= \{y\} \\ \xi_{n+1}^{(y,m)} &= \{x : (x, n+1) \in L \text{ et } \exists y \in \xi_n^{(y,m)} \text{ tq } (y, n) \rightarrow (x, n+1)\} \\ &\quad \text{si cet ensemble est non vide} \\ &= \{n+1\} \text{ sinon} \end{aligned}$$

et

$$r_n'^{(y,m)} = \sup \xi_n'^{(y,m)}$$

qui est cette fois-ci bien défini et de sorte que sous $|C_{(0,0)}| = \infty$ on a toujours $\xi_n^{(0,0)} = \xi_n'^{(0,0)} \neq \emptyset$ et $r_n^{(0,0)} = r_n'^{(0,0)}$ noté dorénavant r_n .
On a, sous $|C_{(0,0)}| = \infty, (0, 0) \rightarrow r_n^{(0,0)}$, en effet, $\forall n, \xi_n^{(0,0)} \neq \emptyset$.

2.2 Énoncé

Le but sera de montrer le résultat suivant :

Théorème 1 (Unicité).

Soient (x_1, n_1) et (x_2, n_2) deux points de L .

Conditionnellement à l'évènement $\{|C_{(x_1, n_1)}| = \infty \text{ et } |C_{(x_2, n_2)}| = \infty\}$,

$C_{(x_1, n_1)}$ et $C_{(x_2, n_2)}$ ne diffèrent que d'un nombre fini de points. On notera $C_{(x_1, n_1)} \simeq C_{(x_2, n_2)}$

Ce résultat est à rapprocher du résultat homologue en percolation classique de l'unicité (propre cette fois-ci) de la composante connexe infinie. Ce résultat est le premier résultat vraiment délicat à montrer en percolation simple. Il en est de même en percolation orientée. Le raisonnement dans le plan (c'est-à-dire en dimension 2) donne des propriétés supplémentaires qui rendent possible la démonstration qui n'a, pour l'instant, pas d'extension en dimension supérieure. On conditionne dès à présent le système à l'évènement $|C_{(0,0)}| = \infty$.

Pour les besoins de la suite, il faut montrer une propriété sur la forme des bords de $C_{(0,0)}$.

2.3 Deux Lemmes

Le lemme important pour comprendre le comportement de cette composante connexe est le suivant :

Lemme 1. Conditionnellement à l'évènement $\{|C_{(0,0)}| = \infty\}$, il existe une droite R_α d'équation $y = \alpha x$ telle que, presque sûrement, $\gamma_{(0,0)}$ croise R_α une infinité de fois.

A noter que le α ainsi défini dépend du p choisit initialement.

Nous allons pour cela nous appuyer sur les travaux de Kuczek [3] qui par des petits raisonnements logiques aboutis à un résultat un peu meilleur que le lemme précédent.

Lemme 2. Conditionnellement à l'évènement $\{|C_{(0,0)}| = \infty\}$, il existe $\alpha(p) > 0$ et $\sigma > 0$ tels que $\frac{\gamma_{(0,0)}(n) - \alpha(p)n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi $N(0, \sigma^2)$

Avec ces deux outils clef sur la compréhension de la frontière de la composante connexe infinie nous allons pouvoir utiliser le second lemme de Borel-Cantelli et découper le problème en sous-évènements indépendants et plus simples.

3 Etude du chemin γ

Les idées qui suivent sont majoritairement dans l'article de Xian-Yuan Wu et Yu Zhang [2].

La première chose va être de montrer que pour deux points de percolation quelconques (x_1, n_1) et (x_2, n_2) , les chemins infinis respectifs $\gamma_{(x_1, n_1)}$ et $\gamma_{(x_2, n_2)}$ se rencontrent. De par la nature du chemin infini le plus à droite, après s'être rencontrés $\gamma_{(x_1, n_1)}$ et $\gamma_{(x_2, n_2)}$ sont confondus!

3.1 Poser les notations

Avant toute chose il faut définir les chemins ouverts anti-orientés :

Définition 4. *Il y a un chemin ouvert anti-orienté de u à v si $v \rightarrow u$. Et on définit naturellement l'ensemble des points anti-accessibles :*

$$C_u^{anti} = \{v \in L : v \rightarrow u\}$$

Quelques autres notations seront utiles pour découper le plan en zones distinctes:

Définition 5. *Le demi-cône supérieur de sommet u (resp. le demi-cône inférieur de sommet u)*

$$\vee_u := \{v \in L : \text{il y a un chemin orienté de } u \text{ à } v\}$$

(resp.

$$\wedge_u := \{v \in L : \text{il y a un chemin anti-orienté de } u \text{ à } v\} \quad)$$

Puis les demi-cônes supérieur et inférieur de sommet u de taille n :

$$\vee_u(n) := \{v \in L : \text{il y a un chemin orienté de } u \text{ à } v \text{ de longueur au plus } n\}$$

$$\wedge_u(n) := \{v \in L : \text{il y a un chemin anti-orienté de } u \text{ à } v \text{ de longueur au plus } n\}$$

Et enfin si $A \subset L$ est contenu dans une ligne horizontale :

$$\vee_A(n) := \bigcup_{u \in A} \vee_u(n)$$

$$\wedge_A(n) := \bigcup_{u \in A} \wedge_u(n)$$

On remarque qu'il suffit de montrer la proposition pour deux points de percolation quelconques (x_1, n_1) et (x_2, n_2) avec $n_1 = n_2$. En effet, supposons sans perte de généralité $n_1 > n_2$ et prenons $(x'_2, n'_2) = \gamma_{(x_2, n_2)}(n_1 - n_2)$ qui est le point de percolation le plus à droite qui soit relié à (x_2, n_2) avec $n_1 = n'_2$. Alors montrer la proposition pour (x_1, n_1) et (x'_2, n'_2) implique la proposition pour (x_1, n_1) et (x_2, n_2) .

Par invariance par translation du problème il suffit de le montrer pour $(0, 0)$ et $(0, -n_0)$ où $n_0 \geq 1$ quelconque. Grâce au lemme 1, on sait que $\gamma_{(0,0)}$ croise R_α une infinité de fois. On définit ainsi les points de croisement de R_α :

Définition 6 (Crossing point).

Soit Γ un chemin infini qui croise R_α une infinité de fois. On dit que v est un point de croisement si $[u, v) \cap R_\alpha \neq \emptyset$ où $[u, v) \subset \Gamma$ est l'arête dans Γ aboutissant en v

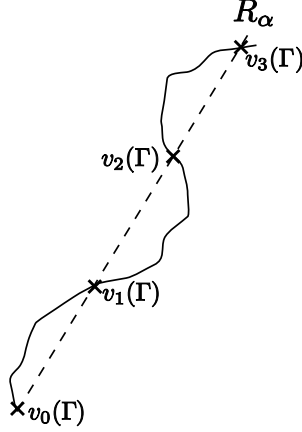


Figure 1: Le lemme 1 affirme qu'il existe une infinité de points de croisement. Il forment donc une suite. Les $v_k(\Gamma)$ en sont une suite extraite.

3.2 Construction de la suite $(v_k(\Gamma))_k$

Soit $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(Z > \epsilon_0) > \frac{1}{3} \quad \text{où } Z \text{ suit la loi } N(0, \sigma^2)$$

Et on utilise le lemme 2:

$$\text{Soit } N_0 \text{ tq } \forall n \geq N_0, \mathbb{P}\left(\frac{\gamma_{(0,0)}(n) - \alpha(p)n}{\sqrt{n}\sigma} > \epsilon_0 \mid |C_{(0,0)}| = \infty\right) \geq \frac{1}{3} \quad (1)$$

Si Γ est un chemin infini qui croise R_α une infinité de fois, on construit la suite de points de croisement : $v_0(\Gamma) = (0, 0), v_1(\Gamma) = (x_1, n_1), \dots, v_k(\Gamma) = (x_k, n_k), \dots$ avec la condition supplémentaire :

$$n_1 > \max\{(2n_0/(\epsilon_0\sigma))^2, N_0\} \quad (2)$$

$$n_k - n_{k-1} > \max\{(2n_{k-1}/(\epsilon_0\sigma))^2, N_0\} \quad (3)$$

Ici nous nous assurons que $n_k - n_{k-1} > N_0$ et $n_1 > N_0$ et donc que nous pouvons utiliser (1) pour $N = n_k - n_{k-1}$ ou $N = n_1$.

Ceci va nous permettre de définir :

$$A_1 := \{(x, 0) \in L \text{ tq } x_1 - n_1 \leq x \leq -n_0\}$$

$$A_k := \{(x, n_{k-1}) \in L \text{ tq } x_k - (n_k - n_{k-1}) \leq x \leq x_{k-1} - 2n_{k-1}\} \quad k \geq 2$$

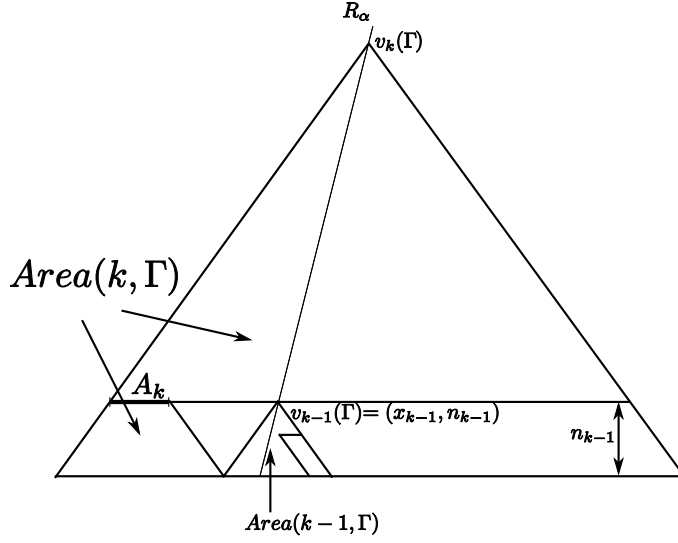


Figure 2: Les zones $Area(k, \Gamma)$ définies grâce aux points de croisement. A noter que leur définition implique qu'elles sont toutes disjointes deux à deux.

et les zones à disjointes :

$$Area(k, \Gamma) := \wedge_{v_k(\Gamma)}(n_k - n_{k-1}) \cup \wedge_{A_k}(n_{k-1})$$

La condition $x \leq x_{k-1} - 2n_{k-1}$ est clef pour que ces zones soient bien disjointes! Et $x_k - (n_k - n_{k-1}) \leq x$ assure que (x, n_{k-1}) soit bien dans $\wedge_{x_k}(n_k)$.

On peut ainsi définir des évènements indépendants par définition et dont on a une minoration de leur probabilité.

3.3 Minoration de $\mathbb{P}_p(E(k, \Gamma) | \gamma_{(0,0)} = \Gamma)$

L'idée est d'avoir une minoration indépendante en k . Soit $E(k, \Gamma)$ l'évènement "il y a un chemin anti-orienté depuis $v_k(\Gamma)$ jusqu'à $]-\infty, +\infty[\times \{0\}$ passant par la demi-ligne $]-\infty, x_{k-1} - 2n_{k-1}] \times \{n_{k-1}\}$ ". $E(k, \Gamma)$ dépend uniquement des zones $Area(k, \Gamma)$ et sont, par conséquent, indépendants entre eux. Désignons par $l_{v_k(\Gamma)}^{anti}$ le chemin anti-orienté infini le plus à gauche partant de $v_k(\Gamma)$.

Remarques

- Le comportement de $l_{v_k(\Gamma)}^{anti}$ est le même que $\gamma_{(0,0)}$ si l'on tourne le plan d'un demi-tour. (Voir figure 3)
- Si $|C_{v_k(\Gamma)}^{anti}| = \infty$ et $l_{v_k(\Gamma)}^{anti} \cap A_k \neq \emptyset$ alors $E(k, \Gamma)$ est réalisé.
- $\gamma_{v_k(\Gamma)} \cap A_k' \neq \emptyset \iff \gamma_{v_k(\Gamma)}(N) - \alpha(p)N \geq 2n_{k-1}$
- $\gamma_{v_k(\Gamma)}(N) - \alpha(p)N \geq \sqrt{N}\epsilon_0\sigma \implies \gamma_{v_k(\Gamma)}(N) - \alpha(p)N \geq 2n_{k-1}$ où $N = n_k - n_{k-1} \geq N_0$ (c'est l'utilisation directe de (2)+(3)).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\gamma_{v_k(\Gamma)} \cap A'_k \neq \emptyset \mid |C_{v_k(\Gamma)}| = \infty) &\geq \mathbb{P}_p\left(\frac{\gamma_{(0,0)}(N) - \alpha(p)N}{\sqrt{N}\sigma} > \epsilon_0 \mid |C_{v_k(\Gamma)}| = \infty\right) \\
&\geq \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Avec ces éléments:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(E(k, \Gamma)) &\geq \mathbb{P}_p(|C_{v_k(\Gamma)}^{anti}| = \infty \text{ et } l_{v_k(\Gamma)}^{anti} \cap A_k \neq \emptyset) \\
&= \mathbb{P}_p(l_{v_k(\Gamma)}^{anti} \cap A_k \neq \emptyset \mid |C_{v_k(\Gamma)}^{anti}| = \infty) \times \mathbb{P}_p(|C_{v_k(\Gamma)}^{anti}| = \infty) \\
&= \mathbb{P}_p(\gamma_{v_k(\Gamma)} \cap A'_k \neq \emptyset \mid |C_{v_k(\Gamma)}| = \infty) \times \mathbb{P}_p(|C_{v_k(\Gamma)}| = \infty) \\
&\geq \frac{1}{3}\theta(p)
\end{aligned}$$

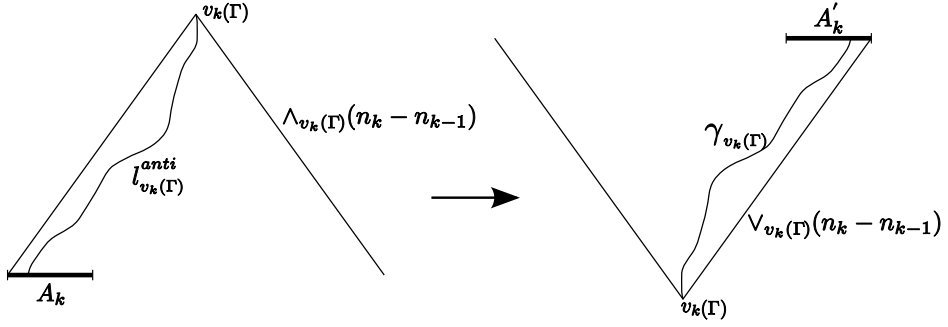


Figure 3: Le comportement de $l_{v_k(\Gamma)}^{anti}$ est le même que celui de $\gamma_{(0,0)}$ quitte à retourner le plan d'un demi-tour.

Il faut maintenant minorer la probabilité $\mathbb{P}_p(E(k, \Gamma) \mid \gamma_{(0,0)} = \Gamma)$. Par l'inégalité FKG et en remarquant que $\{\Gamma \text{ est ouvert}\}$ et $E(k, \Gamma)$ sont des événements croissants on a

$$\mathbb{P}_p(E(k, \Gamma) \mid \Gamma \text{ est ouvert}) \geq \mathbb{P}_p(E(k, \Gamma))$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{P}_p(E(k, \Gamma) \mid \gamma_{(0,0)} = \Gamma) = \mathbb{P}_p(E(k, \Gamma) \mid \Gamma \text{ est ouvert})$$

En effet, sachant $\{\Gamma \text{ est ouvert}\}$, l'évènement $\{\gamma_{(0,0)} = \Gamma\}$ ne dépend que des arêtes à droite de Γ alors que l'évènement $E(k, \Gamma)$ ne dépend que de celles à gauche. En fin de compte nous avons l'inégalité clef pour l'utilisation du second lemme de Borel-Cantelli :

$$\mathbb{P}_p(E(k, \Gamma) \mid \gamma_{(0,0)} = \Gamma) \geq \frac{1}{3}\theta(p)$$

Les événements $E(k, \Gamma)$ sachant $\{\gamma_{(0,0)} = \Gamma\}$ restent indépendants. En effet, ces événements sont mesurables par rapport aux arêtes dans les zones $Area(k, \gamma_{(0,0)})$ à gauche de $\gamma_{(0,0)}$, zones qui sont donc disjointes. Donc presque sûrement sous $\{\gamma_{(0,0)} = \Gamma\}$, $E(k, \Gamma)$ se réalise infiniment souvent. (Voir figure 4) Comme le montre le dessin, la réalisation de $E(k, \Gamma)$ sous $\{\gamma_{(0,0)} = \Gamma\}$ implique que les chemins infinis $\gamma_{(x_1, n_1)}$ et $\gamma_{(x_2, n_2)}$ se rencontrent.

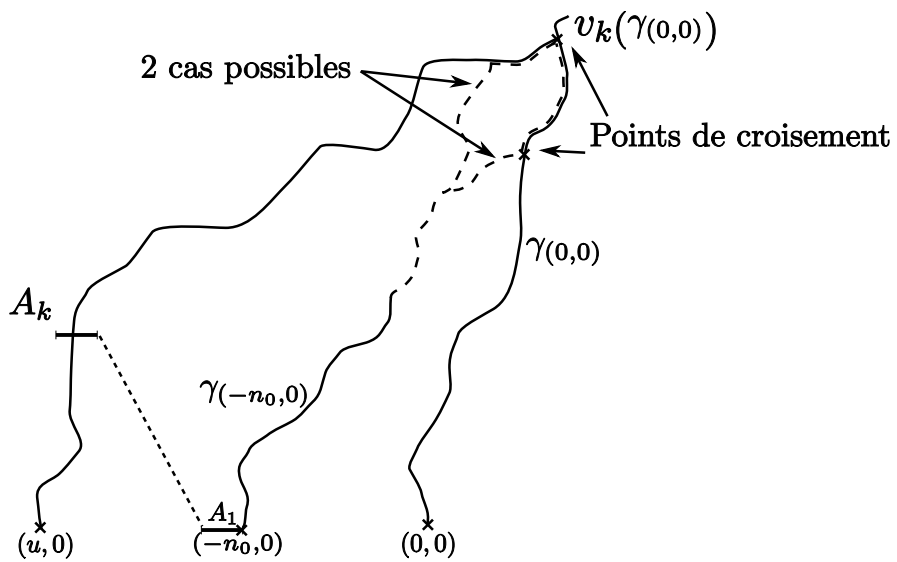


Figure 4: Une réalisation de $E(k, \Gamma)$ pour un certain k . La définition de A_k (et en particulier la condition $x \leq x_{k-1} - 2n_{k-1}$) nous permet de dire que le chemin rencontrant Γ démarre en $(u, 0)$ avec $u < -n_0$.

4 Application pour $C_{(x_1, n_1)} \asymp C_{(x_2, n_2)}$

Il faut maintenant démontrer que $C_{(x_1, n_1)}$ et $C_{(x_2, n_2)}$ ne diffèrent que d'un nombre fini de points, autrement dit que $|C_{(x_1, n_1)} \Delta C_{(x_2, n_2)}| < \infty$. Nous allons montrer que $|C_{(x_1, n_1)} \setminus C_{(x_2, n_2)}| < \infty$ et par symétrie du problème nous aurons $|C_{(x_1, n_1)} \Delta C_{(x_2, n_2)}| < \infty$. Grâce à ce que nous venons de voir, nous savons que $\gamma_{(x_1, n_1)}$ et $\gamma_{(x_2, n_2)}$ se rencontrent et par symétrie nous savons aussi $l_{(x_1, n_1)}$ et $l_{(x_2, n_2)}$ se rencontrent. Il faut maintenant distinguer deux cas.

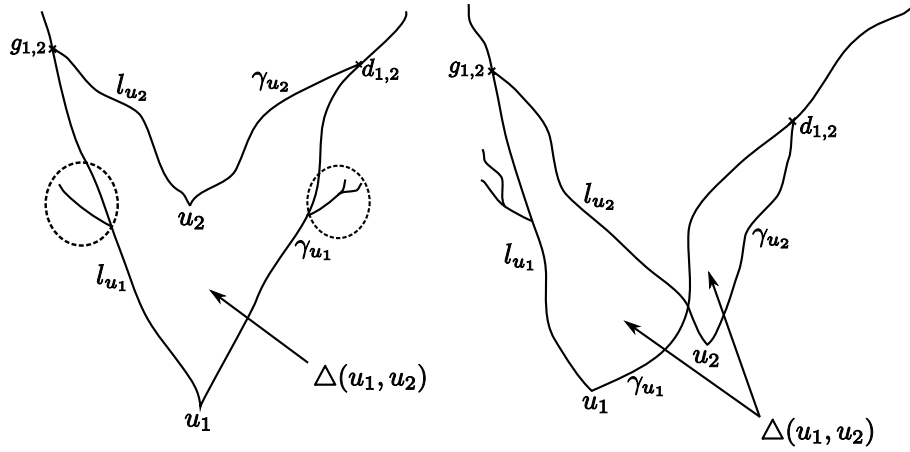


Figure 5: Les deux situations possibles selon que γ_{u_1} croise l_{u_2} ou pas. Les deux zones définies sont différentes mais ne comportent qu'un nombre fini d'arêtes. Ce fait suffit à conclure.

Nous appellerons $\Delta(u_1, u_2)$ la zone définie sur la figure 5. Par la propriété sur γ nous savons que $\Delta(u_1, u_2)$ comporte un nombre fini d'arêtes puisque p.s. γ_{u_1} et γ_{u_2} se rencontrent à une hauteur finie. Et nous avons alors que $C_{u_1} \Delta C_{u_2}$ est inclus dans la réunion de $\Delta(u_1, u_2)$ et des branches finies (par définition de γ et l) rattachées à une portion finie à droite de γ ou à gauche de l (entourées en pointillé sur la figure 5).

Cet ensemble est donc fini et par conséquent, $|C_{u_1} \Delta C_{u_2}| < \infty$. En fin de compte nous avons réussi à montrer qu'en dimension 2, $C_{u_1} \asymp C_{u_2}$.

5 Démonstration des lemmes

Nous allons ici démontrer :

Théorème 2. *Conditionnellement à l'évènement $\{|C_{(0,0)}| = \infty\}$, il existe $\alpha(p) > 0$ tq $\frac{r_n}{n}$ converge p.s. vers $\alpha(p)$.*

5.1 Définition des temps de mort

On définit des temps qui vont s'apparenter à des temps d'arrêt car nous verrons qu'ils ont les mêmes propriétés de renouvellement que des temps d'arrêt au sens strict. Avec la convention $\inf \emptyset = \infty$, soient :

$$\begin{aligned} T_1 &:= \inf\{n \geq 1 : (r_n, n) \text{ est un point de percolation}\} \\ T_2 &:= \inf\{n \geq 1 + T_1 : (r_n, n) \text{ est un point de percolation}\} \\ &\vdots \\ T_{k+1} &:= \inf\{n \geq 1 + T_k : (r_n, n) \text{ est un point de percolation}\} \end{aligned}$$

Les T_i ne sont pas des temps d'arrêt car du "futur" dépend le caractère "point de percolation". Définissons alors :

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= T_1 \\ \tau_2 &:= T_2 - T_1 \\ &\vdots \\ \tau_{k+1} &:= T_{k+1} - T_k \end{aligned}$$

et la suite de points de percolation

$$\begin{aligned} X_1 &:= r_{T_1} \\ X_2 &:= r_{T_2} - r_{T_1} \\ &\vdots \\ X_{k+1} &:= r_{T_{k+1}} - r_{T_k} \end{aligned}$$

On appellera *break points* les points $\{(X_i, T_i)\}$. Ces points sont donc tous contenus dans $\gamma_{(0,0)}$. L'objet de l'étude qui suit est de voir que ce découpage donne des morceaux de trajectoire i.i.d.

Lemme 3 (Indépendance). *Conditionnellement à $|C_{(0,0)}| = \infty$, les variables aléatoires $\{(X_i, \tau_i)\}$ sont i.i.d. admettant des moments de tous ordres.*

Par contre, les variables X_i et τ_i ne sont pas indépendantes entre elles. La clef pour trouver de l'indépendance est de voir τ_i comme temps de mort d'un certain processus et donc de les voir comme temps d'arrêt. Posons :

$$Y(x, n) = \inf\{m : \xi_m^{(x,n)} = \emptyset\}$$

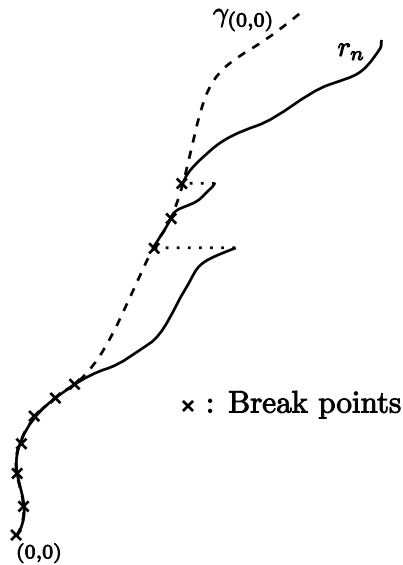


Figure 6: Position des break points

5.2 Décroissance exponentielle

Une propriété importante pour avoir des moments de tous ordres pour les variables aléatoires X_i et τ_i est la suivante :

Proposition 1.

$$\mathbb{P}_p(k \leq Y(0,0) < \infty) \leq Ce^{-\lambda k}$$

où C et λ sont deux constantes strictement positives.

La preuve proposée est inspirée de la preuve similaire en percolation classique issue de [4]

Preuve. La preuve de ce fait est assez facile si l'on mime peu ou prou la démonstration d'un résultat similaire en percolation classique. Nous allons admettre qu'en percolation classique, si $p < p_c$ alors la probabilité

$$\mathbb{P}_p(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq ce^{-\varphi n}$$

où Λ_n est la frontière du domaine $[-n, n]^2$. Il faut maintenant majorer la probabilité $\mathbb{P}_p(n \leq Y(0,0) < \infty)$ par une probabilité faisant appel à la percolation classique. La décroissance exponentielle pour la percolation duale (donc de paramètre $1 - p < p_c$) permet de résoudre le problème. Si $k \leq Y(0,0)$ et $Y(0,0) < \infty$ alors cela signifie qu'il existe un chemin orienté partant de $(0,0)$ et aboutissant en un certain (x, k) ($x \in \xi_k^{(0,0)}$) et un chemin bloquant ω (en percolation classique duale) qui relie les deux demi-droites d'équations : $y = x$ ($x \geq 0$) et $y = -x$ ($x \geq 0$) et passant au dessus de (x, k) .

On note donc E_k cet évènement. Donc :

$$\mathbb{P}_p(n \leq Y(0,0) < \infty) \leq \mathbb{P}_p(E_k)$$

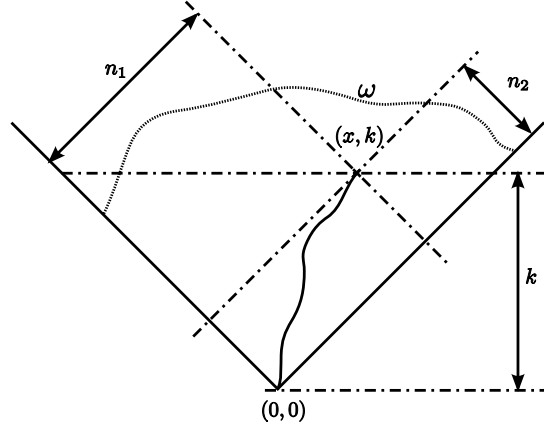


Figure 7: Chemin en percolation (classique) duale entourant un chemin orienté partant de l'origine et de hauteur au moins k . Ce chemin est de longueur au moins $\frac{k}{2}$!

Ce chemin ω est de longueur au moins $\max\{n_1; n_2\} \geq \frac{k}{2}$. Donc

$$\mathbb{P}_p(E_k) \leq \mathbb{P}_p(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_{k/2}) \leq ce^{-\varphi \frac{k}{2}}$$

Nous avons donc bien :

$$\mathbb{P}_p(k \leq Y(0,0) < \infty) \leq Ce^{-\lambda k}$$

□

5.3 Expression de τ_i avec les temps de mort

Soit

$$A_1 = \{(r_1, 1) \text{ est un point de percolation}\}$$

et

$$Y_1 = Y(r_1, 1)$$

Par définition, il y a un saut de trajectoire entre $Y(r_1, 1)$ et $Y(r_1, 1) + 1$ et τ_1 ne peut être qu'un temps de saut. Le but de la première partie de cette preuve va consister à montrer une relation entre τ_1 et les Y_k définis comme suit : Soit

$$A_2 = A_1^c \cap \{(r_{Y_1+1}, Y_1 + 1) \text{ est un point de percolation}\}$$

et

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y(r_{Y_1+1}, Y_1 + 1) \\ &= \infty \quad \text{si } Y_1 = \infty \end{aligned}$$

Et définis par récurrence :

$$A_{k+1} = A_1^c \cap \dots \cap A_k^c \cap \{(r_{Y_1+\dots+Y_k+1}, Y_1+\dots+Y_k+1) \text{ est un point de percolation}\}$$

et

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= Y(r_{Y_1+\dots+Y_k+1}, Y_1 + \dots + Y_k + 1) \\ &= \infty \quad \text{si } Y_k = \infty \end{aligned}$$

$(r_{Y_1+\dots+Y_k+1}, Y_1 + \dots + Y_k + 1)$ est un point de percolation si et seulement si $Y_{k+1} = \infty$. Soit

$$N = \inf\{i : \mathbf{1}_{A_i} = 1\}$$

Donc Y_N est le premier Y_i tel que $Y_i = \infty$ et donc $(r_{Y_1+\dots+Y_N+1}, Y_1 + \dots + Y_N + 1)$ est un point de percolation. Il faut maintenant montrer que c'est le premier break point qui soit un point de percolation et nous aurons donc $\tau_1 = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} Y_i$

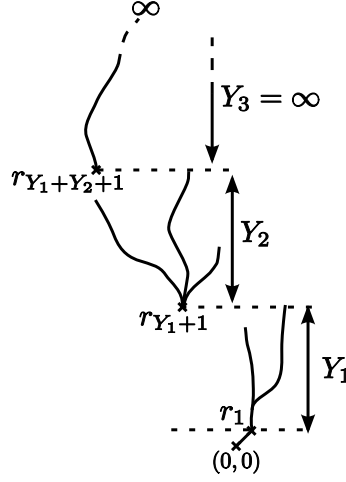


Figure 8: Un cas où Y_1 et Y_2 sont finis et $Y_3 = \infty$. $(r_{Y_1+Y_2+1}, Y_1 + Y_2 + 1)$ est donc le premier point de percolation de la forme (r_n, n) après $(0, 0)$

La première chose importante à voir est que :

Proposition 2. *Si (x, n) n'est pas un point de percolation et $(x, n) \rightarrow (y, m)$, alors (y, m) n'est pas un point de percolation.*

En effet, si (y, m) est un point de percolation, $|C_{(y,m)}| = \infty$ mais comme $(x, n) \rightarrow (y, m)$ on a $C_{(y,m)} \subset C_{(x,n)}$ et donc $|C_{(x,n)}| = \infty$ c'est à dire que (x, n) est un point de percolation.

Nous en déduisons le corolaire évident suivant :

Proposition 3. *Si (r_n, n) n'est pas un point de percolation alors $\forall (y, m) \in C_{(r_n, n)}$, (y, m) n'est pas un point de percolation. En particulier, si (r_n, n) n'est pas un point de percolation alors $(r_{n+m}, n+m)$ $m = 0, \dots, Y(r_n, n) - 1$ n'est pas un point de percolation.*

Pour s'en convaincre, il suffit de montrer $(r_n, n) \rightarrow (r_{n+m}, n+m)$. Puisque $m \leq Y(r_n, n) - 1$, $\xi_{r_n, n}^m \neq \emptyset$. Il existe $(x, n+m)$ tq $(r_n, n) \rightarrow (x, n+m)$ et

$x \leq r_{n+m}$. Mais $(0, 0) \rightarrow (r_{n+m}, n+m)$ donc il existe un certain (y, n) sur le chemin qui relie $(0, 0)$ à $(r_{n+m}, n+m)$ tel que $y \leq r_n$ et $(y, n) \rightarrow (r_{n+m}, n+m)$. Les chemins $(y, n) \rightarrow (r_{n+m}, n+m)$ et $(r_n, n) \rightarrow (x, n+m)$ s'intersectent et enfin $(r_n, n) \rightarrow (r_{n+m}, n+m)$.

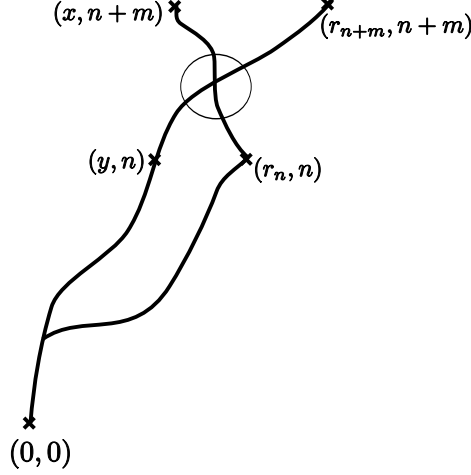


Figure 9: Les chemins $(y, n) \rightarrow (r_{n+m}, n+m)$ et $(r_n, n) \rightarrow (x, n+m)$ s'intersectent. (r_n, n) et $(r_{n+m}, n+m)$ sont reliés.

Donc entre les temps $Y_1 + \dots + Y_k + 1$ et $Y_1 + \dots + Y_{k+1}$ aucun (r_n, n) ne peut être un point de percolation. Les candidats possibles sont alors les $(r_{Y_1 + \dots + Y_{k+1}}, Y_1 + \dots + Y_k + 1)$. Le premier d'entre eux à être un point de percolation est le premier break point. Ce fait nous permet de dire :

$$\tau_1 = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} Y_i$$

5.4 Autour des lois des Y_i

L'étape suivante est de montrer que :

Proposition 4. *Les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_k sont p.s. finies et i.i.d.*

Le fait que les Y_i soient identiquement distribué provient de l'invariance par translation du problème. Soient n_1, \dots, n_k des entiers ≥ 1 . L'évènement $\{Y_1 = n_1, \dots, Y_k = n_k\}$ est mesurable par rapport au arêtes dans $\vee_{(0,0)}(\sum_{i=1}^k n_i)$ alors que $\{Y_{k+1} \leq m\}$ est mesurable par rapport aux arêtes dans $\vee_{(0,0)}(\sum_{i=1}^k n_i + m) \setminus \vee_{(0,0)}(\sum_{i=1}^k n_i)$. Ces deux ensembles d'arêtes sont disjoints et donc

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} \leq m | Y_1 = n_1, \dots, Y_k = n_k) = \mathbb{P}(Y_{k+1} \leq m) = \mathbb{P}(Y(0,0) \leq m)$$

En particulier :

Proposition 5. *N suit une loi géométrique de paramètre $\theta(p)$.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(Y_1 < \infty, \dots, Y_{k-1} < \infty, Y_k = \infty) \\
&= \mathbb{P}(Y(0, 0) < \infty)^{k-1} \mathbb{P}(Y(0, 0) = \infty) \\
&= \mathbb{P}((0, 0) \text{ n'est pas un point de percolation})^{k-1} \mathbb{P}((0, 0) \text{ point de perco.}) \\
&= (1 - \theta(p))^{k-1} \theta(p)
\end{aligned}$$

Une conséquence immédiate de ceci est que la variable aléatoire τ_1 est p.s. finie car p.s. N et les Y_i le sont. La propriété sur les moments de la variable τ_1 s'obtient bien grâce à la propriété de prolongation par continuité des fonctions génératrices.

Soit ϕ la fonction génératrice de la variable $\sum_{i=1}^{N-1} Y_i$. Le calcul permet de la relier à la fonction $\phi_{Y(0,0)} = \mathbb{E}[e^{rY_1} \mathbb{1}_{\{Y_1 < \infty\}}]$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

$$\phi(r) = \mathbb{E}[e^{rS_{N-1}}] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} e^{rS_n} \mathbb{1}_{\{N > n\}}\right] \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[e^{rS_n} \mathbb{1}_{\{N > n\}}]$$

Mais la quantité $\mathbb{E}[e^{rS_n} \mathbb{1}_{\{N > n\}}]$ peut se relier à $\phi_{Y(0,0)}(r)$ comme ceci :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{rS_n} \mathbb{1}_{\{N > n\}}] &= \mathbb{E}[e^{rS_{n-1}} \mathbb{1}_{\{N > n-1\}} e^{rY_n} \mathbb{1}_{\{Y_n < \infty\}}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{rS_{n-1}} \mathbb{1}_{\{N > n-1\}} e^{rY_n} \mathbb{1}_{\{Y_n < \infty\}} | Y_1 \cdots Y_{n-1}]] \\
&= \mathbb{E}[e^{rS_{n-1}} \mathbb{1}_{\{N > n-1\}}] \mathbb{E}[e^{rY_1} \mathbb{1}_{\{Y_1 < \infty\}}]
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité n'est autre que la propriété de Markov (faible). En réitérant cette manipulation on obtient :

$$\mathbb{E}[e^{rS_n} \mathbb{1}_{\{N > n\}}] = \mathbb{E}[e^{rY_1} \mathbb{1}_{\{Y_1 < \infty\}}]^n = (\phi_{Y(0,0)}(r))^n$$

Exploitions maintenant :

$$\phi_{Y(0,0)}(r) \leq \sum_{i=1}^{\infty} e^{ir} \mathbb{P}(Y(0, 0) \geq i | Y(0, 0) < \infty) \leq \frac{C}{1 - \theta(p)} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ir} e^{-\lambda i}$$

$$\phi_{Y(0,0)}(r) \leq \frac{C}{1 - \theta(p)} \frac{e^{(r-\lambda)}}{1 - e^{(r-\lambda)}}$$

Pour $r < \lambda$, $\phi_{Y(0,0)}(r) < \infty$. Mais $g : r \mapsto e^{rY_1} \mathbb{1}_{\{Y_1 < \infty\}}$ est une fonction croissante (décroissante lorsque $r \rightarrow 0$) et positive telle que $\forall t > \lambda \mathbb{E}[g(t)] < \infty$. Et

$$g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \mathbb{1}_{\{Y_1 < \infty\}}$$

Donc $\mathbb{E}[g(t)] \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \mathbb{P}(Y_1 < \infty) < 1$ ce qui donne l'existence d'un r_0 proche de 0 tel que $\forall r \leq r_0 \phi_{Y(0,0)}(r) < 1$. Ce qui donne que sur $]0, r_0]$, $\phi(r) = \mathbb{E}[e^{rS_{N-1}}]$ est définie et se prolonge de façon continue en 0. τ_1 admet donc des moments de tous ordres. Le fait que $X_1 \leq \tau_1$ transmet immédiatement la propriété "avoir des moments de tous ordres" à X_1 .

5.5 Interprétation de $\{(X_1, \tau_1) = (x, t)\} \cap \{|C_{(0,0)}| = \infty\}$

Pour terminer la preuve, il va falloir introduire un nouvel élément. L'objectif est de détailler l'évènement $\{(X_1, \tau_1) = (x, t)\} \cap \{|C_{(0,0)}| = \infty\}$.

$\{(X_1, \tau_1) = (x, t)\} \cap \{|C_{(0,0)}| = \infty\}$ implique de façon facile que $r_t = x$ et que $|C_{(x,t)}| = \infty$. Ceci traduit du fait que (x, t) est un point de percolation et que c'est le point le plus à droite relié à $(0, 0)$. Mais dans $\{(X_1, \tau_1) = (x, t)\}$ avec $\{|C_{(0,0)}| = \infty\}$ est contenu le fait que

$$\forall n = 1 \cdots t - 1, \quad (r_n, n) \text{ n'est pas un point de percolation}$$

En particulier,

$$\forall n = 1 \cdots t - 1, \quad (r_n, n) \text{ n'est pas relié à } (x, t)$$

En effet, nous avons vu précédemment que si $(r_n, n) \rightarrow (x, t)$ et (x, t) est un point de percolation alors (r_n, n) l'est aussi (par la proposition 2) ce qui est chose impossible.

Notons

$$S_t^{(0,0)} = \{\forall n = 1 \cdots t - 1, \quad (r_n, n) \text{ n'est pas relié à } (r_t, t)\}$$

Cette notation $S_t^{(0,0)}$ traduit du fait qu'au temps t , (r_n, n) "change de branche". Nous utiliserons aussi la notation $S_t^{(y,m)}$ pour désigner l'évènement précédent mais où (y, m) joue le rôle de $(0, 0)$ c'est-à-dire

$$S_t^{(y,m)} = \{\forall n = 1 \cdots t - 1, \quad (r_n^{(y,m)}, n + m) \text{ n'est pas relié à } (r_t^{(y,m)}, t + m)\}$$

Le résumé de ces quelques lignes se lit :

$$\{(X_1, \tau_1) = (x, t)\} \cap \{|C_{(0,0)}| = \infty\} \subset \{r_t = x\} \cap \{|C_{(x,t)}| = \infty\} \cap S_t^{(0,0)}$$

En réalité il y a égalité entre les deux ensembles. Si $r_t = x$ et $|C_{(x,t)}| = \infty$, alors (x, t) est un point de percolation tel que $(0, 0) \rightarrow (x, t)$ donc $(0, 0)$ est aussi un point de percolation d'où $|C_{(0,0)}| = \infty$. Reste à montrer $\tau_1 = t$. On sait déjà $\tau_1 \leq t$ car (x, t) est un point de percolation.

Pour $\tau_1 \geq t$, l'argument a déjà été utilisé. Par l'absurde, si il existe $n_0 \in \{1, \dots, t - 1\}$ tel que (r_{n_0}, n_0) est un point de percolation alors il existe (y, t) avec $y \leq r_t$ avec $(r_{n_0}, n_0) \rightarrow (y, t)$. La portion de chemin entre (r_{n_0}, n_0) et (y, t) coupe nécessairement le chemin entre $(0, 0)$ et (r_t, t) . Donc $(r_{n_0}, n_0) \rightarrow (r_t, t)$. D'où enfin :

$$\{(X_1, \tau_1) = (x, t)\} \cap \{|C_{(0,0)}| = \infty\} = \{r_t = x\} \cap \{|C_{(x,t)}| = \infty\} \cap S_t^{(0,0)}$$

5.6 Fin de la preuve du lemme 3

Soit maintenant $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$; $(t_i)_{1 \leq i \leq k}$ et $h_j = \sum_{i=1}^j x_i$; $g_j = \sum_{i=1}^j t_i$.
Par récurrence,

$$\bigcap_{i=1}^k \left\{ \{(X_i, \tau_i) = (x_i, t_i)\} \right\} \cap \{|C_{(0,0)}| = \infty\}$$

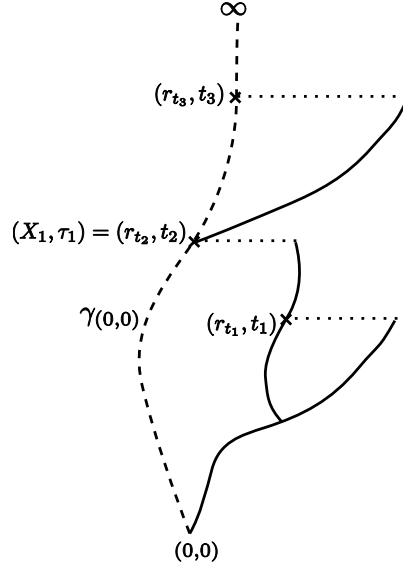


Figure 10: Un exemple de réalisation de $(X_1, \tau_1) = (r_{t_2}, t_2)$. (r_{t_1}, t_1) ne convient pas car $\{|C_{(r_{t_1}, t_1)}| = \infty\}$ n'est pas réalisé, et (r_{t_3}, t_3) ne convient pas car, cette fois, $S_{t_3}^{(0,0)}$ n'est pas réalisé ($(r_{t_2}, t_2) \rightarrow (r_{t_3}, t_3)$).

$$\begin{aligned}
&= \{r_{t_1} = x_1\} \cap S_{t_1}^{(0,0)} \cap \{|C_{(x_1, t_1)}| = \infty\} \cap \bigcap_{i=2}^k \left\{ \{(X_i, \tau_i) = (x_i, t_i)\} \right\} \\
&= \bigcap_{i=1}^k \left\{ \{r_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})} = x_i\} \cap S_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})} \right\} \cap \{|C_{(h_k, g_k)}| = \infty\}
\end{aligned}$$

Remarques

- $S_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})}$ et $\{r_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})} = x_i\}$ sont déterminés par les arêtes dans la tranche $\{(y, m) : g_{i-1} \leq m \leq g_i\}$
- $\mathbb{P}\left(\{r_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})} = x_i\} \cap S_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})}\right) = \mathbb{P}\left(\{r_{t_i}^{(0,0)} = x_i\} \cap S_{t_i}^{(0,0)}\right)$. (C'est une nouvelle fois l'invariance par translation qui permet cette égalité)
- $\{|C_{(h_k, g_k)}| = \infty\}$ est déterminé par les arêtes dans $\{(y, m) : g_k \leq m\}$

Ainsi, en exploitant toutes ces indépendances, nous aboutissons au calcul :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{ \{r_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})} = x_i\} \cap S_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})} \right\} \cap \{|C_{(h_k, g_k)}| = \infty\}\right) \\
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{P}\left(\{r_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})} = x_i\} \cap S_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})}\right) \mathbb{P}(|C_{(h_k, g_k)}| = \infty) \\
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{P}\left(\{r_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})} = x_i\} \cap S_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})}\right) \mathbb{P}(|C_{(0,0)}| = \infty)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{(X_i, \tau_i) = (x_i, t_i)\} \mid |C_{(0,0)}| = \infty\right) &= \prod_{i=1}^k \mathbb{P}\left(\{r_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})} = x_i\} \cap S_{t_i}^{(h_{i-1}, g_{i-1})}\right) \\
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{P}\left(\{r_{t_i}^{(0,0)} = x_i\} \cap S_{t_i}^{(0,0)}\right) \\
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{P}\left((X_1, \tau_1) = (x_i, t_i) \mid |C_{(0,0)}| = \infty\right)
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité achève la démonstration du Lemme 3! Les variables aléatoires (X_i, τ_i) sont bien indépendantes et identiquement distribuées. Nous avons en particulier $(X_i)_i$ i.i.d. et $(\tau_i)_i$ i.i.d. possédant des moments de tous ordres. Donc en notant $N_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$, on obtient :

$$\frac{r_{N_n}}{N_n} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[\tau_1]} = \alpha(p)$$

On peut, en poussant le calcul plus loin, vérifier que :

$$\sqrt{n} \left(\frac{r_{N_n}}{N_n} - \alpha(p) \right) \xrightarrow{(\text{loi})} N(0, \sigma^2)$$

avec $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1 \mathbb{E}[\tau_1] - \tau_1 \mathbb{E}[X_1])^2]$

Les (r_{N_n}, N_n) sont les break points. Ils sont tous sur $\gamma_{(0,0)}$ et donc les lemmes 1 et 2 se déduisent de ce résultat sur les (r_{N_n}, N_n) .

6 Conclusion

La majorité des résultats présentés dans ce mémoire sont contenus dans les articles fondateurs de cette théorie : [2], [3], [1]. Nous avons vu que la démonstration du théorème 1 nécessite une connaissance assez fine de la géométrie de la composante connexe infinie issue de 0. Ceci peut expliquer que la preuve soit relativement récente ([2] 2008). L'étape suivante serait d'étendre ces idées en dimension supérieure. Malheureusement, la plupart des idées utilisent des faits uniquement valables en dimension 2 comme "le chemin le plus à droite" ou des propriétés de croisement (illustrées dans la figure 9) et une généralisation immédiate semble impossible.

Ce mémoire a été réalisé sous la direction de Olivier Garet que je souhaite remercier vivement pour ces idées, sa disponibilité ainsi que le temps qu'il y a consacré.

References

- [1] Richard Durrett. Oriented percolation in two dimensions. *The Annals of Probability*, 1984.
- [2] Xian-Yuan Wu et Yu Zhang. A geometrical structure for an infinite oriented cluster and its uniqueness. *The Annals of Probability*, 2008.
- [3] Thomas Kuczek. The central limit theorem for the right edge of supercritical oriented percolation. *The Annals of Probability*, 1989.
- [4] Wendelin Werner. *Percolation et modèle d'Ising*. Collection SMF, 2009.